

Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 519.2

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АСПЕКТ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ. АНАЛИЗ

С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

Томский политехнический университет

E-mail: rozhkova@tpu.ru

Исследуются свойства количеств информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям, касающиеся информационной эффективности наблюдений с памятью относительно наблюдений с запаздыванием. Получено непосредственное нахождение совместного количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции.

Ключевые слова:

Сигнал, стохастические системы, фильтрация, интерполяция, количество информации.

Key words:

Signal, stochastic system, filtering, interpolation, information amount.

1. Введение

В [1, 2] на основе анализа научных публикаций для систем калмановского типа была решена задача нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью для общего и условно-гауссовского случаев. В данной работе рассматривается информационная эффективность дискретного канала наблюдения с фиксированной памятью единичной кратности относительно дискретного канала без памяти для стационарного гауссовского марковского процесса диффузионного типа (процесс Орнштейна–Уленбека) и непосредственное нахождение совместного количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции. Система обозначений та же, что и в [1, 2].

2. Информационная эффективность наблюдений с памятью относительно наблюдений с запаздыванием

Представляет интерес вопрос об эффективности наблюдений с памятью в задачах фильтрации и интерполяции, т. е. увеличивает или уменьшает количество информации наличие памяти. Данное

исследование проведем для частного случая скалярных стационарных процессов x_t , z_t , $\eta(t_m)$ определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} dx_t &= -ax_t dt + \sqrt{Q}dw_t, \quad a > 0, \quad p_0(x) = N\{x; \mu_0, \gamma_0\}, \\ dz_t &= H_0 x_t dt + \sqrt{R}dv_t, \\ \eta(t_m) &= G_0 x_{t_m} + G_1 x_t + \sqrt{V}\xi(t_m), \end{aligned} \quad (1)$$

когда непрерывные наблюдения без памяти, дискретные наблюдения с памятью единичной кратности ($N=1$, $\tau_1=\tau$), процесс x_t является стационарным гауссовским марковским процессом диффузионного типа с корреляционной функцией $K(\alpha) = [Q/2a] \exp\{-a|\alpha|\}$ и временем корреляции $\alpha_k = 1/a$. Этот процесс, известный как процесс Орнштейна–Уленбека, широко используется как в технических приложениях для моделирования реальных процессов с корреляционной функцией экспоненциального типа [3], так и в финансовой математике для моделирования процесса изменения процентной ставки [4]. В качестве меры информационной эффективности наблюдений с памятью $\eta(t_m)$ относительно наблюдений без памяти $\hat{\eta}(t_m)$, когда $G_0=0$ в задаче фильтрации может быть взята величина (см. (3.6), (3.8) в [1])

$\Delta^f = \Delta I_{t_m}[x_{t_m}; z_{0,t_m}^f, \eta(t_m)] - \Delta \tilde{I}_{t_m}[x_{t_m}; z_{0,t_m}^f, \eta(t_m)]$
и $\Delta^i = \Delta I_{t_m}^i[x_{t_m}; z_{0,t_m}^i, \eta(t_m)] - \Delta \tilde{I}_{t_m}^i[x_{t_m}; z_{0,t_m}^i, \eta(t_m)]$
(см. (3.22), (3.24) в [1]) в задаче интерполяции, где ΔI_{t_m} , $\Delta \tilde{I}_{t_m}$ и $\Delta I_{t_m}^i$, $\Delta \tilde{I}_{t_m}^i$ — приращения количеств информации в моменты времени t_m , поступающие соответственно из наблюдений $\eta(t_m)$ и $\tilde{\eta}(t_m)$. Рассматриваем случай редких дискретных наблюдений, когда на интервалах $t \in (t_m, t_{m+1})$ решения дифференциальных уравнений для элементов матрицы $\Gamma_2(\tau, t)$ достигают стационарных значений [5].

$$\gamma_{11}(t^*) = \gamma[\kappa + (1 - \kappa) \exp\{-2\lambda t^*\}],$$

$$\gamma_{01}(t^*) = \gamma \exp\{-\lambda t^*\}, \quad (1)$$

где $\gamma = (\lambda - a)/\delta$, $\delta = H_0^2/R$, $\lambda = \sqrt{a^2 + \delta Q}$, $\kappa = (\lambda + a)/2\lambda$ и $t^* = t_m - \tau$ является величиной, характеризующая глубину памяти. Тогда, согласно (13), (14) и Следствия 2 в [2]

$$\Delta^f = (1/2) \ln[\tilde{\gamma}(t_m)/\gamma(t_m)],$$

$$\Delta^i = (1/2) \ln[\tilde{\gamma}_{11}(\tau, t_m)/\gamma_{11}(\tau, t_m)], \quad (2)$$

где согласно [5]

$$\gamma(t_m) = \gamma - \frac{[G_0\gamma + G_1\gamma_{01}(t^*)]^2}{V + G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11}(t^*) + 2G_0G_1\gamma_{01}(t^*)},$$

$$\tilde{\gamma}(t_m) = \gamma - [G_1^2\gamma_{01}^2(t^*)/(V + G_1^2\gamma_{11}^2(t^*))], \quad (2.4)$$

$$\gamma_{11}(\tau, t_m) =$$

$$= \gamma_{11}(t^*) - \frac{[G_0\gamma_{01}(t^*) + G_1\gamma_{11}(t^*)]^2}{V + G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11}(t^*) + 2G_0G_1\gamma_{01}(t^*)},$$

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau, t_m) = \gamma_{11}(t^*) - [G_1^2\gamma_{11}^2(t^*)/(V + G_1^2\gamma_{11}^2(t^*))]. \quad (3)$$

Относительно глубины памяти имеются две крайние ситуации: случай малой глубины, когда $t^* \rightarrow 0$, случай большой глубины, когда $t^* \rightarrow \infty$. Пусть $\Delta_0^f = \lim_{t^* \rightarrow 0} \Delta^f$, $\Delta_0^i = \lim_{t^* \rightarrow 0} \Delta^i$ при $t^* \rightarrow 0$, и $\Delta_\infty^f = \lim_{t^* \rightarrow \infty} \Delta^f$, при $t^* \rightarrow \infty$. Из (1–3) следует

$$\Delta_0^f = \Delta_0^i = (1/2) \ln(1 + \rho_0),$$

$$\Delta_\infty^f = (1/2) \ln(1 + \rho_\infty^f), \quad \Delta_\infty^i = (1/2) \ln(1 - \rho_\infty^i),$$

$$\rho_0 = [(G_0^2 + 2G_0G_1)\gamma]/[V + G_1^2\gamma],$$

$$\rho_\infty^f = [G_0^2\gamma]/[V + G_1^2\kappa\gamma],$$

$$\rho_\infty^i = \frac{G_0^2G_1^2\kappa\gamma^2}{G_0^2G_1^2\kappa\gamma^2 + V[V + (G_0^2 + G_1^2\kappa)\gamma]}. \quad (4)$$

Исследование поведения $\Delta^f(t^*)$, $\Delta^i(t^*)$ как функции глубины памяти t^* на основе (1–4) дает следующие результаты (Утверждение 1 для $\Delta^f(t^*)$ и Утверждение 2 для $\Delta^i(t^*)$), в предположении, что

$$\mathbf{G} = \{(G_0, G_1) : G_0^2 + 2G_0G_1 \leq 0\},$$

$$\mathbf{G}^- = \{(G_0, G_1) : G_0^2 + 2G_0G_1 < 0\}.$$

Утверждение 1.

- 1) В случае большой глубины памяти наблюдения с памятью более информативны относительно наблюдений с запаздыванием, т. е. $\Delta_\infty^f > 0$.
- 2) Если $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}^-$, то в случае малой глубины памяти наблюдения с памятью менее информа-

тивны относительно наблюдений с запаздыванием, т. е. $\Delta_0^f < 0$, и $\Delta_0^i \geq 0$ если $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}^-$.

- 3) Если $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}^-$, то $\Delta^f(t^*)$ является монотонно возрастающей функцией глубины памяти от значения $\Delta_0^f < 0$ до значения $\Delta_\infty^f > 0$, обращаясь в ноль в точке $t^* = t_f^*$, для которой справедлива формула

$$t_f^* = (1/\lambda) \ln[2|G_1|/|G_0|], \quad (5)$$

- 4) Если $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}^-$, то $\Delta^f(t^*) \geq 0$ для всех $t^* \geq 0$.

Утверждение 2.

- 1) В случае большой глубины памяти наблюдения с памятью менее информативны относительно наблюдений с запаздыванием, т. е. $\Delta_\infty^i < 0$.
- 2) Если $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$, то в случае малой глубины памяти наблюдения с памятью более информативны относительно наблюдений с запаздыванием, т. е. $\Delta_0^i > 0$, и $\Delta_0^i \leq 0$ если $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}$.
- 3) Если $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}^-$, то $\Delta^i(t^*)$ является монотонно убывающей функцией глубины памяти от значения $\Delta_0^i > 0$ до значения $\Delta_\infty^i < 0$, обращаясь в ноль в точке $t^* = t_i^*$, для которой справедлива формула

$$t_i^* = \frac{1}{a} \ln \frac{|G_0|(V + G_1^2\gamma)}{|G_1|(\sqrt{V^2 + G_0^2\gamma(V + G_1^2\gamma)} \pm V)}, \quad (6)$$

где знак «–», если, и знак «+», если.

- 4) Если $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}$, то $\Delta^i(t^*) \leq 0$ для всех $t^* \geq 0$.

Прокомментируем полученные результаты.

1. Величины t_f^* и t_i^* в виде (5) и (6) получаются как единственный корень, соответственно, уравнений $\Delta^f(t^*) = 0$ и $\Delta^i(t^*) = 0$, которые имеет вид

$$|G_0|^2 - 2|G_0||G_1| \exp\{-\lambda t^*\} = 0, \quad (7)$$

$$G_0^2(V + G_1^2\gamma) \exp\{-2at^*\} +$$

$$+ 2VG_0G_1 \exp\{-at^*\} - G_0^2G_1^2\gamma = 0. \quad (8)$$

Условия $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}^-$ и $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$ являются условиями существования таких решений. Заметим, что точное решение (6) уравнения $\Delta^i(t^*) = 0$ получено только для случая отсутствия непрерывных наблюдений, когда $\delta = 0$, $\lambda = a$, $\kappa = 1$ и имеет вид (8). В общем случае присутствия непрерывных наблюдений получается уравнение четвертой степени относительно $\exp\{-\lambda t^*\}$, что не позволяет получить аналитического решения. Найденные значения t_f^* и t_i^* могут быть определены как эффективная глубина памяти в рассмотренной задаче соответственно при фильтрационном и интерполяционном приемах.

2. Влияние непрерывных наблюдений на информативность дискретных наблюдений осуществляется через параметр $\delta = H_0^2/R$, который пропорционален отношению сигнал/шум по интенсивности в непрерывном канале наблюдения. При $\delta = 0$, что соответствует случаю отсутствия непрерывных наблюдений, справедливы формулы (1–6), в которых $\gamma = Q/2a$, $\lambda = a$, $\kappa = 1$, т. е. в этом случае появляется явная зависимость t_f^* и t_i^* от времени корреляции $\alpha_k = 1/a$ про-

цесса x_t . При $\delta=\infty$ $\Delta I_{in}[\cdot]=\Delta \tilde{I}_{in}[\cdot]=\Delta I_{\tau}^i[\cdot]=\Delta \tilde{I}_{\tau}^i[\cdot]$, что дает $\Delta^f=\Delta^i=0$. Таким образом, при достижении абсолютно точного измерения в непрерывном канале дискретные наблюдения как с памятью так и с запаздыванием не привносят новой информации о значениях x_t , x_{τ} .

- В случае большой глубины памяти $t^* \gg \alpha_k$, где $\alpha_k=1/a$ есть время корреляции процесса x_t , что приводит к отсутствию корреляционных связей между x_t , x_{t_m} . Поэтому при больших t^* сигналы $Y(t_m)=G_0 x_{t_m}$ и $Y_1(\tau)=G_1 x_{\tau}$ не содержат взаимной информации и значениях x_{t_m} и x_{τ} , что приводит к свойству $\Delta_{\infty}^f > 0$ в задаче фильтрации. В задаче интерполяции отсутствие корреляционных связей между x_{t_m} и x_{τ} дает, что сигнал $Y_0(t_m)$ действует в канале с памятью как дополнительный шум, что приводит к свойству $\Delta_{\infty}^i < 0$. В случае малой глубины памяти, когда $t^* \ll \alpha_k$, коэффициент корреляции между значениями x_t и x_{t_m} близок к единице и поэтому сигналы $Y_0(\tau, t_m)=G_0 x_{t_m}+G_1 x_{\tau}$ и $Y_1(\tau)$ воспринимаются как $Y_0(t_m)=(G_0+G_1)x_{t_m}$, $Y_1(t_m)=G_1 x_{t_m}$. Так как условия $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}^-$ и $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$ означают $|G_0+G_1| < |G_1|$ и $|G_0+G_1| > |G_1|$, а интенсивности сигналов $Y_0(t_m)$ и $Y_1(t_m)$ пропорциональны $|G_0+G_1|^2$ и $|G_1|^2$, то это и приводит к свойствам $\Delta_0^f < 0$ и $\Delta_0^i < 0$.

На рис. 1 и 2 приведены семейства кривых $\Delta^f(t^*)$ и $\Delta^i(t^*)$ для ситуаций 3) в Утверждениях 1 и 2. Поведение кривых соответствует проведенному исследованию.

3. Непосредственное нахождение совместного количества информации

Утверждения Следствия из [1] и Следствия 1 из [2] могут быть доказаны непосредственно без использования соответственно Теорем 1 и 2 из [1, 2].

Докажем сначала Следствия из [1].

Доказательство. Априорная плотность (2.6) из [1] определяется уравнением

$$d_t p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) = L_{t,x} [p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)] dt, \quad (9)$$

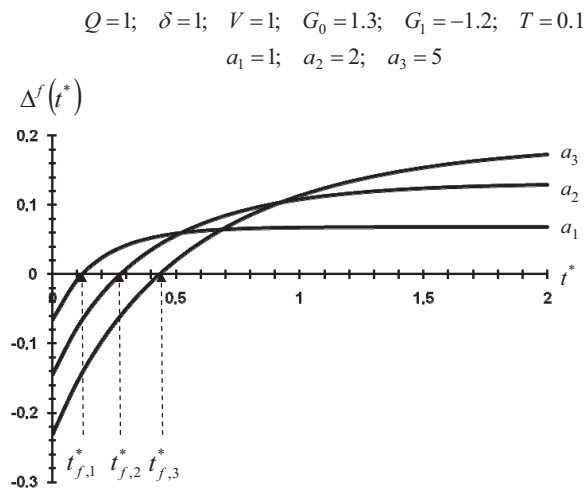


Рис. 1. Зависимости $\Delta^f(t^*)$ от t^* при различных значениях a

которое следует из (3.1) в [1]. Дифференцирование по формуле Ито с использованием (3.1) из [1] и (9) дает

$$\begin{aligned}
 d_t \ln \left[\frac{p'_t(x; \tilde{x}_N)}{p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)} \right] = & \left\{ \frac{1}{p'_t(x; \tilde{x}_N)} L_{t,x} [p'_t(x; \tilde{x}_N)] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)} L_{t,x} [p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)] \right\} dt - \\
 & - \frac{1}{2} [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \times \\
 & \times R^{-1}(t, z) [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}] dt + \\
 & + [h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)}]^T R^{-1}(t, z) d\tilde{z}_t. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Применяя к (10) для $t_m \leq t < t_{m+1}$ формулу Ито–Вентцеля [6, 7], получаем

$$\begin{aligned}
 \ln \left[\frac{p'_t(x; \tilde{x}_N)}{p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)} \right] = & \ln[\cdot]_{|t=t_m} + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_m}^t \text{tr} \left[R^{-1}(\sigma, z) [h(\sigma, x_{\sigma}, \tilde{x}_t^N, z) - h(\sigma, z)] \times \right. \\
 & \times [h(\sigma, x_{\sigma}, \tilde{x}_t^N, z) - h(\sigma, z)]^T \left. \right] d\sigma \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_m}^t \text{tr} \left[Q(\sigma) \left[\frac{\partial \ln p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \ln p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}} \right)^T - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \ln p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \ln p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}} \right)^T \right] \right] d\sigma + \\
 & + \int_{t_m}^t \text{tr} \left[Q(\sigma) \left[\frac{1}{p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_t^N)} \frac{\partial^2 p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_t^N)} \frac{\partial^2 p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_t^N)}{\partial x_{\sigma}^2} \right] \right] d\sigma + \\
 & + \int_{t_m}^t [h(\sigma, x_{\sigma}, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(\sigma, z)}]^T R^{-1}(\sigma, z) \Phi(\sigma, z) dv_{\sigma}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

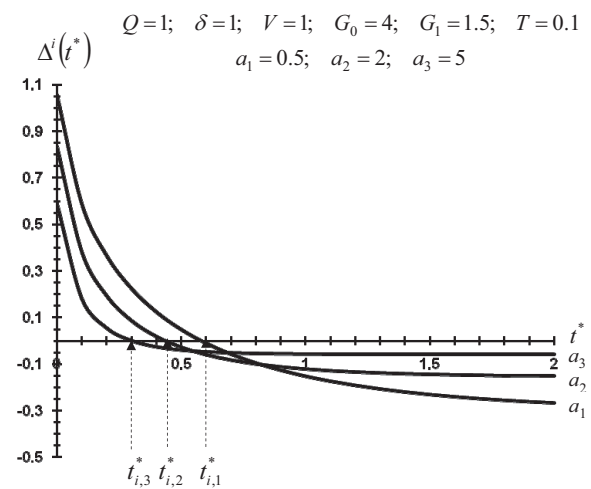


Рис. 2. Зависимости $\Delta^i(t^*)$ от t^* при различных значениях a

Аналогично [4], а также (П. 13) в [3]

$$\mathbf{M} \left\{ \frac{1}{p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_{\tau}^N)} \frac{\partial^2 p_{\tau}^{\sigma}(x_{\sigma}; \tilde{x}_{\tau}^N)}{\partial x_{\sigma}^2} - \frac{1}{p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_{\tau}^N)} \frac{\partial^2 p(\sigma, x_{\sigma}; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_{\tau}^N)}{\partial x_{\sigma}^2} \right\} = O. \quad (12)$$

Вычисление математического ожидания от левой и правой части (11) с учетом (12) и последующее дифференцирование по t приводит к (3.32) из [1] с учетом Замечания 2 из [1], а (3.33), (3.34) из [1] следуют в результате подстановки (3.3) из [1] в (2.17) из [1].

Докажем теперь Следствие 1 из [2].

Доказательство. Из (1–3) в [2] и формулы

$$\overline{h(t, z)} = \mathbf{M}\{h(t, x_{\tau}, \tilde{x}_{\tau}^N, z) | z_0^t, \eta_0^m\}$$

из Утверждения 1 в [1] следует, что

$$\overline{h(t, z)} = h(t, z) + H_{0,N}(t, z) \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t).$$

Тогда (см. (1–4) в [2] с соответствующей заменой переменных: $(t - \tilde{t}_N^*) \rightarrow \tilde{\tau}_N$)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ [h(t, x_{\tau}, \tilde{x}_{\tau}^N, z) - \overline{h(t, z)}] \times \right. \\ \left. \times [h(t, x_{\tau}, \tilde{x}_{\tau}^N, z) - \overline{h(t, z)}]^T \right\} = \\ = H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z). \end{aligned} \quad (13)$$

По свойству гауссовских плотностей [8] для

$$p'_{t|t}(x | \tilde{x}_N) = \partial \mathbf{P}\{x_t \leq x | \tilde{x}_{\tau}^N = \tilde{x}_N, z_0^t, \eta_0^m\} / \partial x,$$

с учетом (5) в [2] имеем

$$p'_{t|t}(x | \tilde{x}_N) = \mathbf{N}\{x; \mu(t | \tilde{\tau}_N), \Gamma(t | \tilde{\tau}_N)\},$$

$$\mu(t | \tilde{\tau}_N) =$$

$$= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0,N}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{\Gamma}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N, t) [\tilde{x}_N - \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t)], \quad (14)$$

а $\Gamma(t | \tilde{\tau}_N)$ определено в (11) из [2]. Из (14) и

$$p'_{\tau}(x; \tilde{x}_N) = p'_{t|t}(x | \tilde{x}_N) p'_{\tau}(\tilde{x}_N),$$

следует, что

$$\begin{aligned} \partial \ln p'_{\tau}(x; \tilde{x}_N) / \partial x &= \partial \ln p'_{t|t}(x | \tilde{x}_N) / \partial x = \\ &= -\Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) [x - \tilde{\mu}(t | \tilde{\tau}_N)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{M} \left\{ [\partial \ln p'_{\tau}(x; \tilde{x}_N) / \partial x] \times \right. \\ \left. \times [\partial \ln p'_{\tau}(x; \tilde{x}_N) / \partial x]^T \right\} = \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N). \quad (15)$$

Аналогичные вычисления для априорных плотностей $p(t, x, \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N)$ (см. Замечание в [2]) приводят к формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ [\partial \ln p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) / \partial x] \times \right. \\ \left. \times [\partial \ln p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) / \partial x]^T \right\} = \\ = D^{-1}(t | \tilde{\tau}_N). \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $\mathbf{M}\{\cdot\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot | z_0^t, \eta_0^m\}\}$ [8], тогда подстановка (3), (15), (16) в (3.32) в [1] приводит к (40) в [2].

Из (3.3) в [1], (5) в [2] следует

$$\begin{aligned} \frac{p'_{\tau}{}^{t_m}(x; \tilde{x}_N)}{p'_{\tau}{}^{t_m-0}(x; \tilde{x}_N)} = \\ = \frac{\mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m)\}}{\mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0)\}} = \\ = [C(x; \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) / C(\eta(t_m), z)]. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом $\mathbf{M}\{\cdot\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot | z_0^t, \eta_0^m\}\}$ и $\mathbf{M}\{\cdot\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot | z_0^t, \eta_0^{m-1}\}\}$ [5] получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\ln[C(x; \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) / C(\eta(t_m), z)]\} = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{M}\{\ln[|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0)| / |\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m)|]\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка (17) в (3.34) из [1] приводит к (41) в [2].

Результаты работы могут быть использованы при исследовании таких базовых задач теории информации и теории передачи сообщений, как информационная эффективность каналов передачи и оптимальная передача (оптимальное кодирование и декодирование), когда в качестве математических моделей сообщений используются стохастических процессы диффузионного типа.

Выводы

Рассмотрен пример информационной эффективности наблюдений с памятью относительно наблюдений с запаздыванием в задачах фильтрации и интерполяции. Проведенное исследование показало, что наличие памяти может как увеличивать, так и уменьшать количество информации. Получено непосредственное нахождение уравнений для совместного количества информации в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации и интерполяции для общего и условно-гауссовского случаев.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 02.740.11.5190 и Deutscher Akademischer Austauschdienst.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 3. – С. 13–17.
2. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 6–10.
3. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. – М.: Наука, 1984. – 205 с.
4. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 5–22.
5. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
6. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 8–96.
7. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Проблемы передачи информации. – 1974. – Т. 10. – № 4. – С. 3–15.
8. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Поступила 15.06.2011 г.

УДК 519.2

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ И ОБОБЩЕННОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. АНАЛИЗ

С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Исследуются свойства количеств информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и обобщенной экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью, касающиеся информационной эффективности наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти.

Ключевые слова:

Сигнал, стохастические системы, экстраполяция, количество информации.

Key words:

Signal, stochastic system, extrapolation, information amount.

Введение

В [1] для систем калмановского типа была решена задача нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и обобщенной экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью для общего и условно-гауссовского случаев. В данной работе рассматривается информационная эффективность дискретного канала наблюдения относительно дискретного канала без памяти для стационарного гауссовского марковского процесса диффузионного типа (процесс Орнштейна–Уленбека). Система обозначений та же, что и в [1].

Информационная эффективность наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти

Представляет интерес вопрос об эффективности наблюдений с памятью в задаче экстраполяции, т. е. увеличивает или уменьшает количество информации наличие памяти. Данное исследование проведем для частного случая скалярных стационарных процессов x_t , z_t , $\eta(t_m)$ определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} dx_t &= -ax_t dt + \sqrt{Q} dw_t, \quad a > 0, \quad p_0(x) = N\{x; \mu_0, \gamma_0\}, \\ dz_t &= H_0 x_t dt + \sqrt{R} dv_t, \\ \eta(t_m) &= G_0 x_{t_m} + G_1 x_t + \sqrt{V} \xi(t_m), \end{aligned} \quad (1)$$

когда непрерывные наблюдения без памяти, дискретные наблюдения с памятью единичной кратности ($N=1$, $\tau_1=\tau$), процесс x_t является стационарным гауссовским марковским процессом диффузионного типа с корреляционной функцией $K(\alpha)=[Q/2a]\exp\{-a|\alpha|\}$ и временем корреляции $\alpha_k=1/a$. Этот процесс, известный как процесс Орнштейна–Уленбека, широко используется как в технических приложениях для моделирования реальных процессов с корреляционной функцией экспоненциального типа [2], так и в финансовой математике для моделирования процесса изменения процентной ставки [3].

В качестве меры информационной эффективности наблюдений с памятью $\eta(t_m)$ относительно наблюдений без памяти $\tilde{\eta}(t_m)$, когда $G_1=0$ в задаче экстраполяции в случае может быть взята величина (см. (3.6), (3.8) в [1])